

IMERSÕES DO ESPAÇO PROJETIVO REAL
DADAS POR APLICAÇÕES BILINEARES NÃO SINGULARES

Vera Lúcia Figueiredo F. Ribeiro

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática, Es-
tatística e Ciência da Com-
putação da Universidade Es-
tadual de Campinas como re-
quisito parcial para a ob-
tenção do título de Mestre
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Conde

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

CAMPINAS

1975

Meus agradecimentos ao
Prof. Dr. Antonio Conde
e aos colegas Professores: Antonio Carlos do
Patrocínio, Antonio Paques e Suely Rodrigues
Costa, pela colaboração recebida.

INTRODUÇÃO

Consideremos \mathbb{R}^n o espaço euclídiano e o seguinte resultado de Whitney: "Uma variedade M^n de dimensão n pode ser imersa em \mathbb{R}^{2n-1} , isto é, existe uma aplicação C^∞ , $f:M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, cuja matriz jacobiana tem posto constante igual a n em cada ponto de M .

Substituindo agora M^n por \mathbb{P}^n , espaço projetivo real, consideremos a seguinte pergunta: "Dado um inteiro positivo n , qual o menor inteiro k , tal que, \mathbb{P}^n imerge em \mathbb{R}^k ?" .

Através de aplicações bilineares não singulares conseguimos uma resposta parcial a esta pergunta, obtendo tais imersões para $8 < n \leq 23$ e $n \neq 19$.

Para isto, dividimos o texto em quatro capítulos.

Os capítulos I e II, "Fibrados Vetoriais" e "Álgebras dos Quaternios e Cayley" respectivamente são encarados como pré-requisitos, onde procuramos desenvolver com a máxima clareza os assuntos a serem tratados no decorrer do trabalho em si, que corresponde aos dois capítulos restantes.

O capítulo III, consta das construções das aplicações bilineares não singulares.

Partimos de K , Álgebra de Cayley e das aplicações $f:K^2 \times K^2 \longrightarrow K^3$ dada por K.Y. LAM [7] e $g:K^3 \times K^3 \longrightarrow K^5$ dada por J.ADEM [1].

Usando basicamente as propriedades de K dadas no capítulo II e considerando restrições convenientes de f e g a vá

rios subespaços de $K^2 \times K^2$ e $K^3 \times K^3$ respectivamente, conseguimos os resultados desejados para então, no capítulo IV, dar suas aplicações.

Uma delas, relaciona a existência de tais aplicações bilineares não singulares com o número de secções independentes do fibrado $k\xi_n^1$ (k -soma de Whitney de ξ_n^1 , fibrado linear canônico sobre \mathbb{P}^n), através do seguinte teorema: "Se existe uma aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ então $k\xi_n^1$ admite r -secções independentes".

A outra, responde a nossa pergunta inicial quando provamos o seguinte resultado: "Se existe uma aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, ($8 < n < k$) então \mathbb{P}^n imerge em \mathbb{R}^k ".

Convém frisar que na demonstração deste teorema, recorremos aos resultados de Hirsch encontrados em [4].

Finalmente, como uma complementação do texto colocamos no final do capítulo IV uma tabela das melhores imersões de \mathbb{P}^n em \mathbb{R}^k para $1 \leq n \leq 23$.

CAPÍTULO I

FIBRADOS VETORIAIS

1.1 - Definição:

Um fibrado vetorial real η sobre um espaço topológico fixo B , consiste do seguinte:

- i) Um espaço topológico $E = E(\eta)$ chamado espaço total.
- ii) uma aplicação contínua $\pi: E \rightarrow B$ chamada projeção.
- iii) para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ tem estrutura de espaço vetorial real.

Satisfazendo a seguinte restrição:

Condição de trivialidade local. Para cada ponto de B , existe uma vizinhança $U \subset B$, um inteiro $n \geq 0$ e um homeomorfismo $h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$, tal que, para cada $b \in U$, a correspondência $x \mapsto h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial \mathbb{R}^n e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

Tal par (U, h) é chamado carta local para η .

O espaço B é chamado espaço base. Se for possível escolher U como sendo todo espaço base, dizemos que η é um fibrado trivial, portanto η é homeomorfo a $B \times \mathbb{R}^n$, que indicaremos algumas vezes por θ^n .

O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado fibra sobre b . Como trabalharemos com B conexo, a dimensão n de $\pi^{-1}(b)$ (que é constante em cada componente conexa de B) será uma função constante de b . Falamos assim de um fibrado vetorial real n -dimensional, que indicaremos por η^n .

O fibrado vetorial η é conhecido também como sendo a terna (E, π, B) .

1.1.1 - O fibrado linear canônico sobre \mathbb{P}^n

\mathbb{P}^n , o espaço projetivo real, pode ser definido como o espaço quociente, S^n por uma relação de equivalência, dada pela identificação dos seus pontos antípodas, i.e:

$$\mathbb{P}^n = S^n / \sim \quad \text{onde } x \sim y \text{ se e somente se } x = \pm y.$$

Os pontos de \mathbb{P}^n serão indicados por $\bar{x} = \{x, -x\}$ com $x \in S^n$.

A aplicação canônica $q: S^n \longrightarrow S^n / \sim$ com $q(x) = \bar{x}$, dá a \mathbb{P}^n a topologia quociente.

ξ_n^1 , fibrado linear canônico sobre \mathbb{P}^n

Seja $E(\xi_n^1)$ o subconjunto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, consistindo de todos os pares $(\bar{x}, \lambda x)$, λ real.

Definimos a aplicação projeção $\pi: E(\xi_n^1) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ pondo $\pi(\bar{x}, \lambda x) = \bar{x}$. Deste modo, cada fibra pode ser identificada com a reta que passa por x e $-x$ em \mathbb{R}^{n+1} , com a estrutura usual de espaço vetorial.

A condição de trivialidade local é verificada, tomando U aberto de S^n que não contém nenhum par de pontos antípodas e tomemos U_1 como a imagem de U em \mathbb{P}^n através de q .

Definindo então $h: U_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1}(U_1)$ por $h(\bar{x}, \lambda) = (\bar{x}, \lambda x)$ para $(x, \lambda) \in S^n \times \mathbb{R}$ temos o par (U_1, h) como sistema de coordenadas locais para ξ_n^1 .

1.1.2 - Soma de Whitney

Consideremos η_1^n e η_2^m dois fibrados vetoriais sobre uma mesma base B com projeções $\pi_1: E_1 \longrightarrow B$ e $\pi_2: E_2 \longrightarrow B$, respectivamente.

O fibrado $\eta_1 \oplus \eta_2$ sobre B é definido como tendo espaço total $E_1 \oplus E_2 = \{(x, x') \in E_1 \times E_2 \mid \pi_1(x) = \pi_2(x')\}$ e projeção $\pi: E_1 \oplus E_2 \longrightarrow B$ dada por $\pi(x, x') = \pi_1(x) = \pi_2(x')$.

Para cada $b \in B$, a fibra $\pi^{-1}(b)$ é $\pi_1^{-1}(b) \times \pi_2^{-1}(b) \subseteq E_1 \times E_2$.

Dado $U \subset B$, se:

$h_1: U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi_1^{-1}(U)$ é carta local de η_1 e $h_2: U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \pi_2^{-1}(U)$ é carta local de η_2 , então: $h_1 \oplus h_2: U \times \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ é carta local de $\eta_1 \oplus \eta_2$ que é chamado de Soma de Whitney de η_1 com η_2 .

De modo análogo define-se Soma de Whitney para um número finito de fibrados, e é fácil ver que

valem a comutatividade e associatividade de \otimes .

1.2 - Aplicações entre fibrados

1.2.1 - Definição: Sejam ξ e η fibrados vetoriais com projeções $\pi_E: E \longrightarrow B$ e $\pi_F: F \longrightarrow B$ respectivamente. Um homomorfismo entre fibrados de mesma base $\phi: \xi \longrightarrow \eta$ é uma aplicação contínua $\phi: E \longrightarrow F$ tal que:

$$i) \quad \pi_E = \pi_F \circ \phi$$

ii) ϕ é linear em cada fibra

A condição i) nos diz que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & F \\ \pi_E \searrow & & \swarrow \pi_F \\ & B & \end{array}$$

é comutativo e ainda que

$\phi(\pi_E^{-1}(b)) \subset \pi_F^{-1}(b)$ para cada $b \in B$, i.e., ϕ preserva as fibras.

A condição ii) nos diz que para cada $b \in B$, $\phi_b: \pi_E^{-1}(b) \longrightarrow \pi_F^{-1}(b)$ é uma aplicação linear de espaços vetoriais.

Nas condições da definição dada, um homomorfismo $\phi: E \longrightarrow F$ é um monomorfismo (respectivamente epimorfismo) se para cada $b \in B$,

$\phi_b: \pi_E^{-1}(b) \longrightarrow \pi_F^{-1}(b)$ é uma aplicação injetora (respectivamente sobrejetora).

Um isomorfismo $\phi: \xi \longrightarrow \eta$ é um homomorfismo injetor e sobrejetor.

1.2.2 - Subfibrada Vetorial

Dados ξ , η dois fibrados vetoriais com projeções $\pi_E: E \longrightarrow B$ e $\pi_F: F \longrightarrow B$ respectivamente, com $E \subset F$, ξ é subfibrado de η ($\xi \subset \eta$) se cada fibra $\pi_E^{-1}(b)$ é um subespaço vetorial da fibra correspondente $\pi_F^{-1}(b)$ para cada $b \in B$.

1.3 - Kernel, Imagem, Cokernel de homomorfismos com posto constante.

1.3.1 - Definição: Um homomorfismo de fibrados $\phi: \xi \longrightarrow \eta$ sobre B como (1.2.1) tem posto constante k se $\phi_b: \pi_E^{-1}(b) \longrightarrow \pi_F^{-1}(b)$ tem posto constante k para todo $b \in B$.

1.3.2 - Teorema: Sejam $\phi: \xi^n \longrightarrow \eta^m$ homomorfismo de fibrados sobre B com posto constante k .

Então:

$\text{Ker } \phi$ é um subfibrado de ξ de dimensão $n-k$, $\text{Im } \phi$ é um subfibrado de η de dim k e $\text{Coker } \phi$ é um subfibrado de η de dim $m-k$. ([5], pag 34)

Observamos que o espaço total de $\text{Coker } \phi$ é o espaço quociente de $F(\eta)$ pela seguinte relação: $y, y' \in F(\eta)$ estão relacionados se

$$\pi_F(y') = \pi_F(y) \quad \text{e} \quad y - y' = \phi(x) \text{ para algum } x \in E(\xi).$$

Decorrem imediatamente do teorema anterior:

1.3.3 - Corolário: Seja $\phi: \xi^n \longrightarrow \eta^m$ um monomorfismo sobre B . Então $\text{Im } \phi$ e $\text{Coker } \phi$ são fibrados ve

toriais (ϕ tem posto constante $m-n$)

1.3.4 - Corolário: Seja $\phi: \xi^n \longrightarrow \eta^m$ um epimorfismo sobre B . Então $\text{Ker } \phi$ é fibrado vetorial.
(ϕ tem posto constante $n-m$).

1.4 - Métrica Riemanniana.

Sejam ξ um fibrado vetorial com projeção

$$\pi: E \longrightarrow B \quad e$$

$$\begin{aligned} \Delta(\xi) &= \{(e, e') \in E \times E \text{ tal que } \pi(e) = \pi(e') = b\} = \\ &= \bigcup_{b \in B} \pi^{-1}(b) \times \pi^{-1}(b) \end{aligned}$$

1.4.1 - Definição: Uma Métrica Riemanniana em ξ é uma aplicação contínua $\langle \cdot, \cdot \rangle: \Delta(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\langle e, e \rangle \geq 0$ e $\langle e, e \rangle = 0 \iff e = 0 \in \pi^{-1}(b)$.
2. $\langle e, e' \rangle = \langle e', e \rangle$
3. $\langle \alpha e_1 + \beta e_2, e' \rangle = \alpha \langle e_1, e' \rangle + \beta \langle e_2, e' \rangle$.

Nosso objetivo será mostrar que todo fibrado vetorial cuja base é paracompacta admite métrica Riemanniana, para isto recordaremos algumas definições e resultados que nos auxiliarão. Para maiores detalhes ver ([8], cap 8 e 9) onde é introduzido uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável.

Seja X espaço topológico.

1.4.2 - Recobrimento localmente finito

Seja $U = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ um recobrimento por abertos do espaço X . Diremos que U é localmente finito se

para todo $x \in X$, existir uma vizinhança V_x de x que intersepta sômente um número finito de elementos de U .

1.4.3 - Suporte de uma função contínua

Seja $f: X \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\}$ contínua, definimos suporte de f como o conjunto

$$\sigma(f) = \text{aderência } \{x \in X ; f(x) > 0\}.$$

1.4.4 - Partição da unidade.

Uma partição da unidade associada a um recobrimento aberto $U = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ localmente finito é uma família de funções contínuas $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde, para cada $\alpha \in A$, $\phi_\alpha: X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é tal que $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um recobrimento localmente finito do espaço X e $\sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in X$ e

$$\sigma(\phi_\alpha) \subset U_\alpha \quad \forall \alpha \in A$$

1.4.5 - Espaço Paracompacto

Um espaço X é paracompacto se X é Hausdorff e todo recobrimento aberto localmente finito de X , possui uma partição da unidade associada a este recobrimento.

1.4.6 - Lema: Um fibrado vetorial trivial sempre admite métrica Riemaniana.

Demonstração: Seja $E = B \times \mathbb{R}^n$ um fibrado trivial com projeção $\pi: E \longrightarrow B$; logo, existe um homeomorfismo $h: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$.

Dado $b \in B$, sejam e, e' pertencentes a mesma fibra de E , isto é, $e, e' \in \pi^{-1}(b) \simeq \mathbb{R}^n$.

Temos então $h^{-1}(e) = (b, \bar{e})$ e $h^{-1}(e') = (b, \bar{e}')$

Definindo $\langle e, e' \rangle_h = \langle \bar{e}, \bar{e}' \rangle$ temos dado uma métrica no fibrado trivial, de fato:

$$1. \quad \langle e, e \rangle_h \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle e, e \rangle_h = 0 \iff e = e' = 0 \in \pi^{-1}(b).$$

$$2. \quad \langle e, e' \rangle_h \text{ é bilinear e simétrica, uma vez que } \langle \bar{e}, \bar{e}' \rangle \text{ o é.}$$

Uma vez que $\langle e, e' \rangle_h = \langle p \circ h^{-1}(e), p \circ h^{-1}(e') \rangle$ onde $p: B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, segue a continuidade global nas variáveis e, e' .

1.4.7 - Teorema: Um fibrado vetorial com base paracompacto admite métrica Riemanniana.

Demonstração: Seja ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi: E \rightarrow B$. Seja $U = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ um recobrimento aberto localmente finito de B tal que sobre os abertos deste recobrimento, ξ é trivial.

Pelo lema anterior, sabemos que para cada U_α está definida uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$.

Mas B é paracompacto, logo possui uma partição da unidade $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ tal que $\text{supp}(\phi_\alpha) \subset U_\alpha$.

Assim poderemos definir globalmente uma métrica Riemanniana em ξ , por:

$$\langle e, e' \rangle = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(b) \langle \bar{e}, \bar{e}' \rangle_\alpha \quad \text{onde} \\ b = \pi(e) = \pi(e').$$

1.5 - Sequência de Homomorfismos

1.5.1 - Definição: Sejam ξ, η, γ fibrados vetoriais sobre uma mesma base B .

Dizemos que a sequência de homomorfismos de fibrados

$\xi \xrightarrow{u} \eta \xrightarrow{v} \gamma$ é exata em η se a sequência

$\pi_{\xi}^{-1}(b) \xrightarrow{u_b} \pi_{\eta}^{-1}(b) \xrightarrow{v_b} \pi_{\gamma}^{-1}(b)$ for exata

em $\pi_{\eta}^{-1}(b)$, $\forall b \in B$, i.e., se $\text{Im } u_b = \text{Ker } v_b \quad \forall b \in B$.

Indicamos este fato por $\text{Im } u = \text{Ker } v$.

Notação $0 = (B, I_B, B)$

1.5.2 - Teorema.

Seja $0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{u} \eta \xrightarrow{v} \gamma \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta, i.e., u é monomorfismo, $\text{Im } u = \text{Ker } v$ e v é epimorfismo. Se η é um fibrado vetorial com métrica Riemanniana, então existe um isomorfismo $w: \xi \oplus \gamma \rightarrow \eta$ de modo que o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \xi & \xrightarrow{u} & \eta & \xrightarrow{v} & \gamma \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow I_{\xi} & & \uparrow w & & \uparrow I_{\gamma} \\ 0 & \longrightarrow & \xi & \xrightarrow{i} & \xi \oplus \gamma & \xrightarrow{j} & \gamma \longrightarrow 0 \end{array}$$

o homomorfismo i é a inclusão no 1º fator e j a projeção sobre o 2º fator

Demonstração: Seja $\xi' = \text{Im } u$ onde

$E(\xi') \subset E(\eta)$. Consideremos

$E(\gamma') = \{x \in E(\eta) \text{ com } \langle x, x' \rangle = 0 \quad \forall x \in E(\xi) \text{ com } \pi_\eta(x) = \pi_\eta(x')\}.$

Seja $g: E(\eta) \longrightarrow E(\xi')$ a projeção de $\pi_\eta^{-1}(b)$ sobre $\pi_{\xi'}^{-1}(b)$ para cada $b \in B$.

Queremos mostrar que g é contínua.

Para isto podemos supor

$u: B \times \mathbb{R}^m \longrightarrow B \times \mathbb{R}^n$ um monomorfismo

e $\langle x, x' \rangle_b$ a métrica em $B \times \mathbb{R}^m$, então

$g: B \times \mathbb{R}^m \longrightarrow B \times \mathbb{R}^n$ é dada por

$$g(b, x) = (b, \sum_{i=1}^n \langle x, u_b(e_i) \rangle e_i) \text{ onde}$$

$e_1 \dots e_n$ é a base canônica do \mathbb{R}^n . e portanto g é contínua.

Desde que g_b é contínua linear e sobre,

$g: \eta \longrightarrow \xi'$ é um epimorfismo e então $\text{Ker } g$ é um subfibrado de η temos que γ' é subfibrado de η pois $\text{Ker } g = \gamma'$.

Temos ainda $v_{\gamma'}: \gamma' \longrightarrow \gamma$ é isomorfismo e de-

finimos finalmente w_{ξ} como sendo o isomorfis-

mo $\mu: \xi \longrightarrow \xi' \subset \eta$ e w_{γ} como sendo o isomor-

fismo $(v_{\gamma'})^{-1}: \gamma \longrightarrow \gamma' \subset \eta$.

1.6 - Apêndice.

Consideremos o fibrado $(n+1)\xi_n^1$ a soma de Whitney de ξ_n^1 por êle mesmo, $(n+1)$ vezes, cujo espaço total é dado por:

$$E((n+1)\xi_n^1) = \{(\bar{x}, \lambda_1 x, \dots, \lambda_{n+1} x), x \in S^n, \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n+1\}$$

1.6.1 - Um isomorfismo entre $(n+1)\xi_n^1$ e $\zeta(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1$.

Denotando por $\langle x, y \rangle$ o produto interno no \mathbb{R}^n , definimos o fibrado tangente a S^n , $\zeta(S^n)$ como sendo a terna (E, π, S^n) onde $E \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ é obtido da relação, $(x, v) \in E$,

se e somente se $\langle x, v \rangle = 0$ e a projeção $\pi: E \rightarrow S^n$ dada por $\pi(x, v) = x$ nos dá as fibras $\pi^{-1}(x)$ como espaços vetoriais de dimensão \underline{n} .

O par (x, v) é chamado vetor tangente a S^n em x . A partir de $\zeta(S^n)$, definimos $\zeta(\mathbb{P}^n)$ o fibrado tangente a \mathbb{P}^n pela terna $(E_1, \pi_1, \mathbb{P}^n)$ onde E_1 é obtido de E pela identificação $(x, v) = (-x, -v)$, que indicamos por $(\overline{x, v})$ com $\pi_1: E_1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\pi_1\left[\overline{(x, v)}\right] = \bar{x}$.

É fácil ver que $\zeta(S^n)$ e $\zeta(\mathbb{P}^n)$ satisfazem a condição de trivialidade local.

O isomorfismo f sobre \mathbb{P}^n entre $(n+1)\xi_n^1$ e $\zeta(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1$ é construído da seguinte maneira:

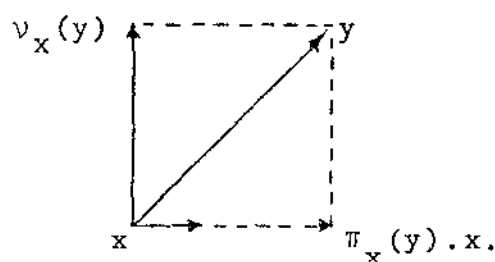
Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, existem duas funções lineares $v_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, aplicação normal e

$\pi_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção em x , tal que

$$y = v_x(y) + \pi_x(y) \cdot x \text{ com } \pi_x(y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

$$, v_x(y) = y - \pi_x(y) \cdot x,$$

$$\text{e } \langle v_x(y), v_x(y) \rangle = 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n.$$



Definimos $f: (n+1)\xi_n^1 \longrightarrow \zeta(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1$ por:

$$f(\bar{x}, \lambda_1 x, \dots, \lambda_{n+1} x) = ((x, v_x(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})),$$

, $(\bar{x}, \pi_x(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}))$) cuja inversa é dada

por:

$$g(\overline{(x, y)}, (\bar{x}, k)) = (\bar{x}, p_1(y+kx).x, \dots, p_{n+1}(y+kx).x)$$

onde $p_i: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a projeção da i -ésima coordenada ([5], pg. 16).

1.6.2 - Outra representação de ξ_n^1 .

Como em (1.1.1) consideremos

$E(\xi_n^1) = \{(\bar{x}, \lambda x); x \in S^n, \lambda \in \mathbb{R}\}$, espaço total de ξ_n^1 .

Tomemos $E_1(\xi_n^1)$ o espaço obtido de $S^n \times \mathbb{R}$ pela identificação $(x, \lambda) = (-x, -\lambda)$ ou $E_1(\xi_n^1) = S^n \times \mathbb{R} /_T$ onde T é a involução $T(x, \lambda) = (-x, -\lambda)$.

Indicaremos os elementos de $E_1(\xi_n^1)$ por $(\bar{x}, \bar{\lambda})$

Consideremos a projeção $\pi_{E_1}: E_1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ dada

$$\text{por } \pi_{E_1}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{x}.$$

Nosso objetivo é mostrar que $E(\xi_n^1)$ e $E_1(\xi_n^1)$ são isomorfos.

Para isto, consideremos a aplicação $f: S^n \times \mathbb{R} \rightarrow E$ contínua e sobre E , dada por $f(x, \lambda) = (\bar{x}, \lambda x)$ que satisfaz, $f(-x, -\lambda) = (-\bar{x}, (-\lambda) \cdot (-x)) = (\bar{x}, \lambda x) = f(x, \lambda)$. Sendo assim, tal aplicação passa ao quociente, isto é, existe uma única $\phi: S^n \times \mathbb{R} /_T \rightarrow E$ tal que $\phi \circ q(x, \lambda) = f(x, \lambda)$ onde q é a aplicação quociente.

Como $\phi \circ q = f: S^n \times \mathbb{R} \rightarrow E$ é contínua e $S^n \times \mathbb{R} /_T$ tem a topologia co-induzida por q , segue-se que ϕ é contínua.

Além disso, ϕ é injetora e sobre.

Logo, $\phi: E_1 \rightarrow E$ dada por $\phi[(\bar{x}, \lambda)] = (\bar{x}, \lambda x)$ é um isomorfismo de fibrados, pois:

$$\phi_{\bar{x}}^{-1}: \pi_{E_1}^{-1}(\bar{x}) \longrightarrow \pi_E^{-1}(\bar{x})$$

$$(x, \lambda) \longmapsto (x, \lambda x) \text{ é linear.}$$

$$\begin{aligned} \phi_{\bar{x}}^{-1}[(x, \lambda_1) + (x, \lambda_2)] &= \phi_{\bar{x}}^{-1}(x, \lambda_1 + \lambda_2) = \\ &= (x, (\lambda_1 + \lambda_2)x) = (x, \lambda_1 x) + (x, \lambda_2 x) = \\ &= \phi_{\bar{x}}^{-1}(x, \lambda_1) + \phi_{\bar{x}}^{-1}(x, \lambda_2) = \phi_{\bar{x}}^{-1}[\alpha(x, \lambda_1)] = \\ &= \phi_{\bar{x}}^{-1}(x, \alpha \lambda_1) = (x, \alpha \lambda_1 x) = \alpha(x, \lambda_1 x) = \alpha \phi_{\bar{x}}^{-1}(x, \lambda_1) \end{aligned}$$

para todo $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

* * *

CAPÍTULO II

ÁLGEBRAS DOS QUATERNIOS E CAYLEY

2.1 - Álgebras lineares

2.1.1 - Definição: Seja P um corpo, uma "álgebra linear" sobre o corpo P ou simplesmente álgebra sobre P é um espaço vetorial A sobre P com uma operação adicional dita multiplicação de vetores, que associa a cada par de vetores $a, b \in A$ um vetor $a.b$ em A dito produto de a por b de maneira que, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\alpha \in P$ tem-se:

- i) $a(bc) = (ab)c$.
- ii) $a(b+c) = ab + ac$.
- iii) $(b+c)a = ba + bc$.
- iv) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$,

Se existir um elemento e em A tal que $ae = ea = a$ para todo a em A dizemos que A é uma álgebra linear sobre P com elemento unidade. A é comutativa se $ab = ba$ para todo $a, b \in A$.

Observação: 1) Se A é tal que não vale a propriedade i) chamaremos A de álgebra não-associativa.

2) Note que A com estas operações é um anel.

2.1.2 - Definição: Seja $(R, +, \cdot)$ um anel.

Definimos centro de R ($C(R)$) como o conjunto dos elementos a de R que permutam com todos os elementos de R , isto é, $ax = xa$ para todo $x \in R$.

2.1.3 - Proposição: Se uma álgebra A sobre um corpo P tem elemento unidade $e \neq 0$, então $C(A)$ contém um subcorpo contendo e , isomorfo a P .

Demonstração: Consideremos P' o conjunto dos elementos da forma αe com $\alpha \in P$.

Seja $\mu : P \longrightarrow P'$ a aplicação definida por $\mu(\alpha) = \alpha e$, que é um morfismo, pois para todo $\alpha, \beta \in P$ tem-se

$$(\alpha + \beta)e = \alpha e + \beta e$$

$$(\alpha\beta)e = (\alpha\beta)(ee) = (\alpha e.\beta)e = \alpha e.\beta e$$

Na verdade μ é um isomorfismo, pois μ é sobrejetora e sendo P um corpo, $\text{Ker } \mu$ é um ideal impróprio de P . Se $\text{Ker } \mu = P$, $\mu(1) = 0$ onde 1 é o elemento unidade de P , mas, $\mu(1) = e.1 = e \neq 0$. Logo $\text{Ker } \mu$ é o ideal zero e portanto μ é um monomorfismo. Finalmente P' está contido no centro de A .

Para quaisquer $x, y \in A$ temos

$$(\alpha e)x = \alpha(ex) = \alpha(xe) = x(\alpha e).$$

2.1.4 - Considerações gerais sobre as operações na álgebra A .

Seja A uma álgebra sobre um corpo P . No espaço

vetorial desta álgebra, escolhemos uma base X , consistindo dos elementos x_i , tal que i percorre um certo conjunto de índices.

Então todo elemento $a \in A$ pode ser expresso de modo único como,

$$a = \sum_{x_i \in X} x_i \alpha_i \quad (\alpha_i \in P).$$

Com isto ficam bem determinadas a adição de elementos de A e a multiplicação por elementos de P .

Se $x_i, x_j \in X$, $x_i \cdot x_j \in A$, logo tem uma expressão em termos dos vetores da base

$$x_i x_j = \sum_{x_k \in X} x_k \xi_{ij}^k \text{ onde somente um número finito de } \xi_{ij}^k \text{ são diferentes de zero.}$$

O sistema de elementos ξ_{ij}^k do corpo P , determina completamente a multiplicação na álgebra A .

Para elementos $\alpha, \beta \in P$ temos,

$$(x_i \alpha)(x_j \beta) = (x_i x_j)(\alpha \beta) = \sum_{x_k \in X} x_k (\xi_{ij}^k \alpha \beta)$$

Dados dois elementos de A

$$a = \sum_{x_i \in X} x_i \alpha_i, \quad b = \sum_{x_j \in X} x_j \beta_j \quad (2)$$

como somente um número finito dos coeficientes α_i, β_j pode ser diferente de zero e levando em conta as leis distributivas obtemos

$$\begin{aligned}
 a.b &= \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i^{\alpha_i}) (x_j^{\beta_j}) = \\
 &= \sum_{i,j,k} x_k (\xi_{ij}^k \alpha_i \beta_j). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Naturalmente, se escolhemos uma outra base de A , os números ξ_{ij}^k mudam, e então obtemos uma "tábua de multiplicação" diferente de (1). Vale a pena ressaltar que:

Se uma base X de elementos $x_i (i \in I)$ é escolhida num espaço vetorial V sobre um corpo P e elementos arbitrários ξ_{ij}^k são tomados em $P (i, j, k \in I)$, então existe uma álgebra sobre P que tem V como espaço vetorial e que é dada na base X pela tábua de multiplicação (1) com estes coeficientes ξ_{ij}^k .

Para isto, basta tomar (3) como definição de produtos de dois elementos $a, b \in V$ cujas expressões na base X são da forma (2) e é fácil ver que as condições da definição 1.2.1 são satisfeitas.

Uma álgebra construída deste modo pode não ser associativa nem comutativa, o seguinte resultado nos ajudará na determinação de tal álgebra.

2.1.5 - Proposição: Se uma base X é escolhida numa álgebra A sobre um corpo P , então a álgebra A será associativa ou comutativa se e somente se,

para quaisquer $x_i, x_j, x_k \in X$ $x_i(x_j x_k) = (x_i x_j) x_k$ ou $x_i x_j = x_j x_i$ respectivamente.

Demonstração:

Sejam $a, b, c \in A$, tal que $a = \sum_{x_i \in X} x_i^{\alpha_i}$,

$$b = \sum_{x_j \in X} x_j^{\beta_j} \quad e \quad c = \sum_{x_k \in X} x_k^{\gamma_k}.$$

- i) $(ab)c = a(bc) \Rightarrow (x_i x_j) x_k = x_i (x_j x_k)$
 ii) $ab = ba \Rightarrow x_i x_j = x_j x_i$
 iii) $(x_i x_j) x_k = x_i (x_j x_k)$ para todo $x_i, x_j, x_k \in X \Rightarrow$
 $\Rightarrow (ab)c = a(bc)$

$$\begin{aligned} (ab)c &= \left(\sum_{x_i \in X} x_i^{\alpha_i} \cdot \sum_{x_j \in X} x_j^{\beta_j} \right) \cdot \sum_{x_k \in X} x_k^{\gamma_k} = \\ &= \left(\sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i^{\alpha_i} \cdot x_j^{\beta_j}) \right) \cdot \sum_{x_k \in X} x_k^{\gamma_k} = \\ &= \left(\sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i x_j)^{(\alpha_i \beta_j)} \right) \cdot \sum_{x_k \in X} x_k^{\gamma_k} = \\ &= \sum_{x_i, x_j, x_k \in X} (x_i x_j) x_k \cdot (\alpha_i \beta_j \gamma_k) = \\ &= \sum_{x_i, x_j, x_k \in X} x_i (x_j x_k) \cdot (\alpha_i \beta_j \gamma_k) \\ &= \sum_{x_i \in X} x_i^{\alpha_i} \sum_{x_j, x_k \in X} (x_j x_k)^{(\beta_j \gamma_k)} = a \cdot (bc). \end{aligned}$$

$$\text{iv) } x_i x_j = x_j x_i \Rightarrow ab = ba.$$

$$\begin{aligned} ab &= \sum_{x_i \in X} x_i^{\alpha_i} \sum_{x_j \in X} x_j^{\beta_j} = \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i^{\alpha_i} x_j^{\beta_j}) = \\ &= \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} (x_i x_j)^{(\alpha_i \beta_j)} = \sum_{x_j \in X} \sum_{x_i \in X} (x_i x_j)^{(\alpha_i \beta_j)} \end{aligned}$$

$$(x_j x_i) \cdot (\beta_j \alpha_i) = \sum_{x_j \in X} (x_j \beta_j) \cdot \sum_{x_i \in X} (x_i \alpha_i) = ba.$$

2.1.6 - Definição

Uma álgebra A sobre um corpo P é de dimensão finita se o espaço vetorial desta álgebra sobre P é de dimensão finita.

2.1.7 - Definição. Seja \mathbb{R} o corpo dos reais

Uma álgebra de divisão real D é um anel de divisão D $[(D, +, \cdot)]$ é anel e os elementos não nulos de D formam um grupo com relação a multiplicação] com \mathbb{R} como subanel de tal modo que $xd = dx$ para todo $d \in D$ e $x \in \mathbb{R}$.

Uma álgebra D de divisão real é uma álgebra linear sobre \mathbb{R} com elemento unidade, que é o elemento unidade da multiplicação em D .

2.2 - Exemplos de Álgebras

2.2.1 - Corpo dos Complexos:

O corpo \mathbb{C} dos complexos é uma álgebra de divisão sobre o corpo dos Reais.

Esta álgebra tem dimensão 2 pois $1, i$ formam uma base para ela.

A tábua de multiplicação nesta base é dada por:

	1	i
1	1	i
i	i	-1

$$\begin{aligned} \text{ou } 1^2 &= 1 \\ 1i &= i \quad i1 = i \\ i^2 &= -1 \end{aligned}$$

2.2.2 - Álgebra dos Quaternions

Vamos contruir uma álgebra de divisão de dimensão 4 sobre \mathbb{R} .

Consideremos o conjunto $Q = \{(a,b,c,d); a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$.

Se (a,b,c,d) , (a',b',c',d') são elementos de Q , definimos a adição em Q por:

$$(a,b,c,d) + (a',b',c',d') = (a+a',b+b',c+c',d+d')$$

e se $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$x(a,b,c,d) = (xa,xb,xc,xd)$$

Q com estas operações é um espaço vetorial real

Tomemos agora os elementos de Q ,

$$e = (1,0,0,0), i = (0,1,0,0), j = (0,0,1,0), \\ k = (0,0,0,1)$$

Todo elemento $\alpha \in Q$, $\alpha = (a,b,c,d)$ pode ser escrito como

$$\alpha = (a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + \\ + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1) = \\ = ae + bi + cj + dk$$

Os elementos e,i,j,k formam uma base para Q .

Definimos o produto destes elementos pela seguinte tábua de multiplicação:

	e	i	j	k
e	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Para encontrar o produto na tábua por exemplo, o produto de j por i , fazemos a intersecção da linha correspondente a j com a coluna corres-

pondente a i , e encontramos $-k$, isto é, $ji = -k$. Assim fica determinado o produto em Q que passa a ser uma álgebra sobre os reais.

Desta tábua de multiplicação segue que

- 1) \underline{e} é o elemento unidade de Q .

Observação: Passaremos indicar \underline{e} por 1 .

assim se $\alpha = (a, b, c, d) \in Q$, então

$$\alpha = a + bi + cj + dk$$

- 2) Q é uma álgebra não comutativa;

por exemplo $ij = k$ e $ji = -k$

- 3) Q é uma álgebra associativa, pois de acordo com (2.1.5) é suficiente verificar as equações:

$$(ii)i = i(ii)$$

$$(ii)j = i(ij)$$

$$(ij)i = i(ji)$$

$$(ji)i = j(ii)$$

$$(ij)k = i(jk)$$

O centro de Q , isto é os elementos $\beta \in Q$ tal que $\alpha\beta = \beta\alpha$ para todo $\alpha \in Q$, é formado pelos elementos $\beta = (x, 0, 0, 0) = x$ com $x \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = a + bi + cj + dk$ é um elemento de Q , chamamos $\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$ de conjugado de α .

Verifica-se facilmente que valem as equações

$$i) \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} ; \quad ii) \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha} \quad \text{para todo}$$

$\alpha, \beta \in Q$. e iii) $\overline{\alpha\alpha} = \overline{\alpha\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

O número real não negativo $N(\alpha) = \overline{\alpha\alpha} = \overline{\alpha\alpha}$ é chamado norma de α .

e $N(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$.

$N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in Q$, de fato

$$\begin{aligned} N(\alpha\beta) &= (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\beta)(\overline{\beta\alpha}) = \alpha(\beta\overline{\beta})\alpha = \alpha N(\beta)\overline{\alpha} = \\ &= \overline{\alpha\alpha} N(\beta) = N(\alpha) N(\beta). \end{aligned}$$

Deste modo Q não contém divisores do zero, isto é, se $\alpha\beta = 0$ então $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

$$\begin{aligned} \alpha\beta = 0 &\implies N(\alpha\beta) = 0 = N(\alpha) N(\beta) \implies N(\alpha) = 0 \text{ ou } \\ N(\beta) = 0 &\implies \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0. \end{aligned}$$

Se $\alpha \in Q$ é tal que $\alpha \neq 0$ então existe inverso

$$\text{de } \alpha, \alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{N(\alpha)}$$

Deste modo está construído Q , uma álgebra de divisão real de dimensão 4.

2.2.3 - Álgebra de Cayley.

Vamos construir uma álgebra não associativa de dimensão 8 sobre \mathbb{R} , com divisão única e com um elemento unidade.

Consideremos o conjunto $K = \{\alpha + \beta e ; \alpha, \beta \in Q\}$ onde e é um novo símbolo.

Definimos em K a adição e multiplicação por um número real a , pelas equações

$$(\alpha + \beta e) + (\gamma + \delta e) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)e \quad (1)$$

$$a(\alpha + \beta e) = a\alpha + (a\beta)e \quad (2)$$

Obtemos assim um espaço vetorial real de dimensão 8 com base $1, i, j, k, e, ie, je, ke$ já que um elemento de K é da forma $\alpha + \beta e$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Definimos neste espaço, a multiplicação pela equação.

$$(\alpha + \beta e) \cdot (\gamma + \delta e) = (\alpha\gamma - \delta\beta) + (\delta\alpha + \beta\gamma)e \quad (3)$$

É fácil verificar a distributividade desta multiplicação com respeito a adição (2) e ainda a validade das equações

$$a[(\alpha + \beta e) \cdot (\gamma + \delta e)] = [a(\alpha + \beta e)] \cdot (\gamma + \delta e) = (\alpha + \beta e) [a(\gamma + \delta e)] .$$

Esta álgebra K é chamada, álgebra de Cayley, a tábua de multiplicação nesta álgebra é dada por:

	1	i	j	k	e	ie	ke	je
1	1	i	j	k	e	ie	je	ke
i	i	-1	k	-j	ie	-e	-ke	je
j	j	-k	-1	i	je	ke	-e	-ie
k	k	j	-i	-1	ke	-je	ie	-e
e	e	-ie	-je	-ke	-1	i	j	k
ie	ie	e	ke	je	-i	-1	-k	j
ke	ke	ke	e	-ie	-j	k	-1	-i
je	je	-je	ie	e	-k	-j	i	-1

A álgebra de Cayley não é comutativa nem associativa.

Por exemplo

$$(ik)e = -je = -je$$

$$i(ke) = je .$$

De (3) concluímos que $1 = 1+0e$ é o elemento uni

+ N(β). N(γ) + a - b onde

$$a = \gamma \bar{\beta} \delta \alpha + \bar{\alpha} \bar{\delta} \beta \bar{\gamma}$$

$$b = \alpha \gamma \bar{\beta} \delta + \bar{\delta} \beta \bar{\gamma} \bar{\alpha} .$$

desde que $\overline{\gamma \bar{\beta} \delta \alpha} = \bar{\alpha} \bar{\delta} \beta \bar{\gamma}$

$$\overline{\alpha \gamma \bar{\beta} \delta} = \bar{\delta} \beta \bar{\gamma} \bar{\alpha}$$

Temos a e b são números reais

Se $\alpha = 0$ então $a = b = 0$, logo $a-b = 0$.

Se $\alpha \neq 0$, $N(\alpha) \neq 0$ e desde que a é real

$$\begin{aligned} a \cdot N(\alpha) &= \alpha a \bar{\alpha} = \alpha \gamma \bar{\beta} \delta N(\alpha) + N(\alpha) \cdot \bar{\delta} \beta \bar{\gamma} \bar{\alpha} = \\ &= (\alpha \gamma \bar{\beta} \delta + \bar{\delta} \beta \bar{\gamma} \bar{\alpha}) N(\alpha) = b \cdot N(\alpha) \text{ então } a=b \text{ e por-} \\ &\text{tanto } a-b = 0. \end{aligned}$$

Deste modo

$$\begin{aligned} N(\xi \cdot \eta) &= N(\alpha) \cdot N(\gamma) + N(\beta) \cdot N(\delta) + N(\alpha) N(\gamma) + \\ &\quad + N(\beta) N(\gamma) = \\ &= [N(\alpha) + N(\beta)] \cdot [N(\gamma) + N(\delta)] = N(\xi) \cdot N(\eta) . \end{aligned}$$

Segue daqui que a álgebra de Cayley não tem divisores do zero.

Se $\xi \in K$ é tal que $\xi \neq 0$ então existe o inver-
so de ξ , $\xi^{-1} = \frac{\bar{\xi}}{N(\xi)}$.

Se ξ e η são elementos de K , com $\xi \neq 0$ a equa-
ção $\xi \zeta = \eta$ tem uma solução $\zeta = \bar{\xi} \eta \cdot [N(\xi)]^{-1}$
e é única porque não temos divisores do zero.

Do mesmo modo, a única solução da equação

$$\zeta \xi = \eta \quad (\xi \neq 0) \quad \text{é dada por}$$

$$\zeta = \eta \bar{\xi} \cdot [N(\xi)]^{-1}$$

2.3 - ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS

2.3.1 - Definição:

Uma álgebra não associativa R é alternativa se valem as seguintes equações:

$$(i) \quad (yx)x = y(xx) ; \quad (ii) \quad (xx)y = x(xy)$$

para quaisquer x, y em R .

2.3.2 - Proposição:

A álgebra de Cayley é alternativa

Demonstração:

Vamos verificar (i). Sejam $\xi = \alpha + \beta e$, $\eta = \gamma + \delta e$ dois elementos de K .

$$\begin{aligned} (\eta\xi) \cdot \xi &= [(\gamma\alpha - \bar{\beta}\delta) + (\beta\gamma + \delta\bar{\alpha})e] \cdot (\alpha + \beta e) = \\ &= [(\gamma\alpha - \bar{\beta}\delta)\alpha - \bar{\beta}(\beta\gamma + \delta\bar{\alpha})] + [\beta(\gamma\alpha - \bar{\beta}\delta) + (\beta\gamma + \delta\bar{\alpha})\bar{\alpha}]e = \\ &= [\gamma\alpha^2 - \bar{\beta}\delta\alpha - \bar{\beta}\beta\gamma + \bar{\beta}\delta\bar{\alpha}] + [\beta\gamma\alpha - \beta\bar{\beta}\delta + \beta\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\alpha}\bar{\alpha}]e = \\ &= [\gamma\alpha^2 - \bar{\beta}\delta(\alpha + \bar{\alpha}) - \bar{\beta}\beta\gamma] + [\beta\gamma(\alpha + \bar{\alpha}) - \beta\bar{\beta}\delta + \delta\bar{\alpha}\bar{\alpha}]e = \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \eta(\xi\xi) &= (\gamma + \delta e) \cdot [(\alpha^2 - \bar{\beta}\beta) + (\beta\alpha + \beta\bar{\alpha})e] = \\ &= [\gamma(\alpha^2 - \bar{\beta}\beta) + (\beta\alpha + \beta\bar{\alpha})\delta] + [(\beta\alpha + \beta\bar{\alpha})\gamma + \delta(\alpha^2 - \bar{\beta}\beta)]e = \\ &= [\gamma\alpha^2 - \gamma\bar{\beta}\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}\delta + \alpha\bar{\beta}\delta] + [\beta\alpha\gamma + \beta\bar{\alpha}\gamma + \delta\bar{\alpha}\bar{\alpha} - \delta\bar{\beta}\beta]e = \\ &= [\gamma\alpha^2 - \bar{\beta}\beta\gamma + (\bar{\alpha} + \alpha)\bar{\beta}\delta] + [\beta(\alpha + \bar{\alpha})\gamma + \delta\bar{\alpha}\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}\delta] \end{aligned}$$

Desde que $(\alpha + \bar{\alpha})$ e $\bar{\beta}\beta$ são números reais eles comutam com qualquer quaternio

Logo $(\eta\xi)\xi = \eta(\xi\xi)$.

De modo análogo, verifica-se (ii).

2.3.3 - Definição:

Se x, y, z são elementos de uma álgebra R , definimos o comutador e o associador destes elementos respectivamente por:

$$[x, y] = xy - yx$$

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz).$$

Note que o associador $[x, y, z]$ é linear em cada variável e que $[-x, y, z] = -[x, y, z]$

2.3.4 - Propriedades do associador $[x, y, z]$ numa álgebra alternativa R .

$$i) [x, x, y] = [y, x, x] = 0$$

$$ii) [x, y, x] = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= [x, x+y, x+y] \\ &= [x, x+y, x] + [x, x+y, y] \\ &= [x, x, x] + [x, y, x] + [x, x, y] + [x, y, y] \\ &= [x, y, x]. \end{aligned}$$

iii) Se os elementos x, y, z de R são permutados, então o associador $[x, y, z]$ fica inalterado quando a permutação é par e troca de sinal quando é ímpar.

Para isto é suficiente mostrar que:

$$[x, y, z] = -[y, x, z] = [y, z, x]$$

Temos:

$$\begin{aligned} [x+y, x+y, z] &= [x, x, z] + [x, y, z] + [y, x, z] + [y, y, z] \\ &= [x, y, z] + [y, x, z]. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } [x, y, z] = -[y, x, z]$$

2.3.5 - Identidades de Moufang.

$$i) \quad (xzx)y = x(z(xy))$$

$$ii) \quad (xy)(zx) = x(yz)x.$$

para todo x, y, z numa álgebra alternativa R , onde podemos escrever xzx uma vez que $[x, z, x] = 0$.

$$\begin{aligned} (xzx)y - x(z(xy)) &= [xz, x, y] + [x, z, xy] \\ &= -[x, xz, y] - [x, xy, z] \\ &= -(x(xz))y + x((xz)y) - (x(xy))z + x((xy)z) \\ &= -((xx)z)y - ((xx)y)z + ((xz)y + (xy)z) \\ &= -[x^2, z, y] - [x^2, y, z] - x^2(z y) - x^2(y z) \\ &\quad + x((xz)y + (xy)z) \\ &= x(-x(z y) - x(y z) + (xz)y + (xy)z) \\ &= x([x, z, y] + [x, y, z]) = 0. \end{aligned}$$

estabelecemos i) que implica ii).

$$\begin{aligned} (xy)(zx) - x(yz)x &= [x, y, zx] + x(y(zx) - (yz)x) \\ &= -[x, zx, y] - x[y, z, x] \\ &= -(xzx)y + x((zx)y - [y, z, x]) \\ &= -x(z(xy) - (zx)y + [y, z, x]) \\ &= -x(-[z, x, y] + [y, z, x]) = 0. \end{aligned}$$

A identidade ii) é equivalente a

$$iii) \quad [xy, z, x] = [x, y, z]x \quad \text{para todo}$$

x, y, z em R , desde que:

$$\begin{aligned} [xy, z, x] &= ((xy)z)x - (xy)(zx) = ((xy)z)x - x(yz)x = \\ &= ((xy)z - x(yz))x = [x, y, z]x. \end{aligned}$$

2.3.6 - Proposição: Se K é a álgebra de Cayley,

$$[x,y,z] \neq 0 \text{ implica } \begin{cases} [x,y] \neq 0 \\ [x,z] \neq 0 \\ [y,z] \neq 0 \end{cases}.$$

para quaisquer x,y,z em K .

Demonstração: Tomemos x em K , \bar{x} seu conjugado e consideremos os números reais

$$t(x) = x + \bar{x}, \quad N(x) = x\bar{x} = \bar{x}x, \text{ o}$$

traço e a norma de x respectivamente.

Para x,y em K , o número real

$$R = N(x+y) - N(x) - N(y) \text{ satisfaz,}$$

$$xy + yx - yt(x) - xt(y) + R = 0.$$

Se $[x,y] = 0$, ie, $xy = yx$ então

$$2xy - yt(x) = xt(y) - R. \text{ Assim,}$$

$[2xy - yt(x), z, x] = [xt(y) - R, z, x]$ para quaisquer x,y,z em K .

Mas $[xt(y) - R, z, x] = 0$, pela linearidade do associador, junto com o fato de K ser alternativa e R real.

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= [2xy - yt(x), z, x] = [2xy, z, x] - [yt(x), z, x] \\ &= [x, y, z] 2x - [y, z, x] t(x) = \\ &= [x, y, z] 2x - [x, y, z] t(x) = [x, y, z] (2x - t(x)) \end{aligned}$$

Desde que K não tem divisores do zero e como

$[x,y,z] \neq 0$ temos $2x - t(x) = 0$. O que implica x real. Contradição.

Nota: Usaremos a proposição anterior na seguinte forma

2.3.7 - Se $[x,y] = 0$ então $[x,y,z] = 0$ para quaisquer x,y,z em K .

* * *

CAPÍTULO III

CONSTRUÇÕES DE APLICAÇÕES BILINEARES NÃO SINGULARES

Nosso principal interesse neste capítulo está voltado para construções de aplicações bilineares não singulares, isto é, uma aplicação bilinear $f: R^a \times R^b \rightarrow R^c$ tal que se $f(x,y) = 0$, $x \in R^a$, $y \in R^b$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

Trabalharemos essencialmente com a álgebra de Cayley K , juntamente com suas propriedades mencionadas no capítulo anterior.

Como já foi visto, dados $x = (a_1, a_2)$ e $y = (b_1, b_2)$ números de Cayley, representados como pares de quaternios o produto xy é dado por:

$$xy = (a_1 b_1 - \bar{b}_2 a_2, b_2 a_1 + a_2 \bar{b}_1).$$

3.1 - A aplicação $K^2 \times K^2 \rightarrow K^3$

Sejam $u = (x_1, x_2) \in K^2$ e $v = (y_1, y_2) \in K^2$. Colocando;

$$\phi_1(u,v) = x_1 y_1 - \bar{y}_2 x_2$$

$$\phi_2(u,v) = y_2 x_1 + x_2 \bar{y}_1$$

$$\phi_3(u,v) = x_2 y_2 - y_2 x_2$$

Então definimos $f(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$.

3.1.1 - Teorema: A aplicação bilinear $f: K^2 \times K^2 \rightarrow K^3$

é não singular. Além disso, por convenientes:

restrições, f induz as seguintes aplicações bilineares não singulares

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \mathbb{R}^{16} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{23} & \text{v)} \quad \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{22} \\ \text{ii)} \quad \mathbb{R}^{13} \times \mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^{19} & \text{vi)} \quad \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{15} \longrightarrow \mathbb{R}^{21} \\ \text{iii)} \quad \mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}^{17} & \text{vii)} \quad \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{14} \longrightarrow \mathbb{R}^{20} \\ \text{iv)} \quad \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{16} & \text{viii)} \quad \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{16} \end{array}$$

Demonstração:

Se $f(u,v) = 0$ então $\phi_1(u,v) = \phi_2(u,v) = \phi_3(u,v) = 0$.

Obtemos assim tres equações

$$(1) \quad x_1 y_1 = \bar{y}_2 x_2 ;$$

$$(2) \quad y_2 x_1 = - x_2 \bar{y}_1 ;$$

$$(3) \quad x_2 y_2 = y_2 x_2 .$$

Para provar a não-singularidade da f , usamos estas equações e as propriedades da álgebra de Cayley.

Multiplicando a equação (1) por \bar{y}_1 a direita e a equação (2) por \bar{y}_2 a esquerda obtemos

$$(1'): \quad (x_1 y_1) \bar{y}_1 = (\bar{y}_2 x_2) \bar{y}_1 .$$

$$(2'): \quad \bar{y}_2 (y_2 x_1) = - \bar{y}_2 (x_2 \bar{y}_1) .$$

Somando membro a membro estas duas equações obtemos.

$$(3'): \quad (x_1 y_1) \bar{y}_1 + \bar{y}_2 (y_2 x_1) = (\bar{y}_2 x_2) \bar{y}_1 - \bar{y}_2 (x_2 \bar{y}_1)$$

Desde que $y_2 + \bar{y}_2$ é um número real,

$$x_2 (y_2 + \bar{y}_2) = (y_2 + \bar{y}_2) x_2 , \text{ usando (3) temos}$$

mos $x_2 \bar{y}_2 = \bar{y}_2 x_2$ e por (2.3.7) segue:

$$(\bar{y}_2 x_2) \bar{y}_1 = \bar{y}_2 (x_2 \bar{y}_1) .$$

Assim, a equação (3') fica reduzida a

$$(4) \quad (x_1 y_1) \bar{y}_1 + \bar{y}_2 (y_2 x_1) = 0 .$$

Desde que $y_1 \bar{y}_1 = \bar{y}_1 y_1$ e $\bar{y}_2 y_2 = \bar{y}_2 y_2$ usando novamente (2.3.7) temos a equação (4) na forma

$$(4') \quad x_1 (y_1 \bar{y}_1) + (\bar{y}_2 y_2) x_1 = 0$$

Sendo $\bar{y}_2 y_2$ um número real, reduzimos (4') para:

$$x_1 [(y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)] = 0 .$$

Suponhamos $v = (y_1, y_2) \neq 0$, temos $x_1 \neq 0$ e voltando a equação (1), temos $\bar{y}_2 x_2 = 0$ e portanto $x_2 = 0$.

Logo $u = (x_1, x_2) = (0, 0)$

Assim f é não singular

A segunda parte da demonstração, consiste em obter as seguintes aplicações;

$$i) \quad \mathbb{R}^{16} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{23} .$$

Desde que K^2 tem dimensão 16 sobre \mathbb{R} , vamos verificar que a aplicação f dada é tal que, sua imagem está num subespaço de K^3 de dimensão 23. Para isto vamos verificar o termo

$$\phi_3(u, v) = x_2 y_2 - y_2 x_2 .$$

Consideremos $x_2 = (a_1, a_2)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$ representados como pares de quaternios.

Uma vez que:

$$x_2 y_2 = (a_1 b_1 - \bar{b}_2 a_2, b_2 a_1 + a_2 \bar{b}_1) \quad e$$

$$y_2 x_2 = (b_1 a_1 - \bar{a}_2 b_2, a_2 b_1 + b_2 \bar{a}_1). \text{ temos:}$$

$$x_2 y_2 - y_2 x_2 = (a_1 b_1 - b_1 a_1 + \bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2, b_2(a_1 - \bar{a}_1) - a_2(b_1 - \bar{b}_1))$$

O quaternio $a_1 b_1 - b_1 a_1$ é um imaginário puro.

De fato:

Consideremos

$$a_1 = a_{11} + a_{12}i + a_{13}j + a_{14}k$$

$$b_1 = b_{11} + b_{12}i + b_{13}j + b_{14}k \quad \text{com}$$

$$a_{1i}, 1 \leq i \leq 4 \text{ e } b_{1i}, 1 \leq i \leq 4 \text{ números reais.}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 - b_1 a_1 &= (2a_{13}b_{14} - 2a_{14}b_{13})i + \\ &+ (2a_{14}b_{12} - 2a_{12}b_{14})j + (2a_{12}b_{13} - 2a_{13}b_{12})k. \end{aligned}$$

Um cálculo análogo mostra que o quaternio

$$\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2$$

também não tem parte real.

Desta forma, o termo $x_2 y_2 - y_2 x_2 \in K$ é um imaginário puro, isto é, está num subespaço de K de dimensão 7.

Logo imagem de f está num subespaço de K^3 de dimensão 23, isto prova i).

$$ii) \quad \mathbb{R}^{13} \times \mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^{19}$$

Consideremos V , um subespaço de K^3 de dimensão 5 consistindo dos elementos (a, b) com a real e b quaternio.

Sejam $x_2, y_2 \in V$ tal que $x_2 = (a_1, a_2)$ e

$$y_2 = (b_1, b_2) \text{ com}$$

a_1, b_1 reais e a_2, b_2 quaternios.

Consideremos $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ com u e v no subespaço $K \oplus V$ de K^2 de dimensão 13.

Vamos verificar que f restrita a este subespaço tem sua imagem num subespaço de K^3 de dimensão 19.

Para tais u e v , o termo

$$\begin{aligned} x_2 y_2 - y_2 x_2 &= (a_1 b_1 - b_1 a_1 + \bar{a}_2 b_2 - \\ &- \bar{b}_2 a_2, b_2 (a_1 - \bar{a}_1) - a_2 (b_1 - \bar{b}_1)) . \end{aligned}$$

Sendo a_1 real, ele comuta com qualquer quaternio, portanto $a_1 b_1 = b_1 a_1$, e como b_1 também é real, $a_1 = \bar{a}_1$ e $b_1 = \bar{b}_1$, logo

$$b_2 (a_1 - \bar{a}_1) = 0 \text{ e } a_2 (b_1 - \bar{b}_1) = 0$$

Temos então que

$$x_2 y_2 - y_2 x_2 = (\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2, 0).$$

Pela parte i), vimos que $\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2$ é um imaginário puro, então $x_2 y_2 - y_2 x_2$ está num subespaço de K de dimensão 3 e portanto imagem da f está num subespaço de K^3 de dimensão 19.

$$\text{iii)} \quad \mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}^{17}$$

Consideremos V , um subespaço de K de dimensão 3 consistindo dos elementos (a, b) com a real e b complexo.

Sejam $x_2, y_2 \in V$ tal que $x_2 = (a_1, a_2)$, $y_2 = (b_1, b_2)$ e $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ com u e v no subespaço $K \otimes V$ de K^2 de dimensão 11.

Por (ii), $x_2 y_2 - y_2 x_2 = (\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2, 0)$, e como $\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2$ é um complexo que não tem parte real, $x_2 y_2 - y_2 x_2$ está num subespaço de K de dimensão 1.

Assim, imagem da f restrita ao subespaço de dimensão 11 de K^2 está num subespaço de dimensão 17 de K^3 .

$$\text{iv) } \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$$

Consideremos V , um subespaço de K de dimensão 2 consistindo dos elementos (a, b) com a e b reais.

Sejam $x_2 = (a_1, a_2)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$ com $x_2, y_2 \in V$. e $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ com u, v pertencentes ao subespaço de $K \otimes V$ de K^2 de dimensão 10. O termo $x_2 y_2 - y_2 x_2 = (\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2, 0) = (0, 0)$ já que a_2, b_2 são números reais.

Logo imagem de f está num subespaço de K^3 de dimensão 16.

$$\text{v) } \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{22}$$

Consideremos V , um subespaço de K de dimensão 2 consistindo dos elementos (a, b) com a e b reais.

Sejam $u = (x_1, x_2)$ um elemento do subespaço

$K \otimes V$ de K^2 de dimensão 10, e $v = (y_1, y_2)$ um elemento de K^2 .

Para tais u e v analisemos o termo $x_2 y_2 - y_2 x_2$ com $x_2 = (a_1, a_2)$, $y_2 = (b_1, b_2)$ onde a_1, a_2 são reais e b_1, b_2 quaternios.

$$\begin{aligned} x_2 y_2 - y_2 x_2 &= (a_1 b_1 - b_1 a_1 + \bar{a}_2 b_2 - \\ &- \bar{b}_2 a_2, b_2(a_1 - \bar{a}_1) - a_2(b_1 - \bar{b}_1)) \end{aligned}$$

Como a_1, a_2 são reais, $a_1 b_1 = b_1 a_1$ e $\bar{a}_2 b_2 = a_2 b_2$ e então $\bar{a}_2 b_2 - \bar{b}_2 a_2 = a_2 b_2 - a_2 \bar{b}_2 = a_2(b_2 - \bar{b}_2)$.

Portanto

$$x_2 y_2 - y_2 x_2 = (a_2(b_2 - \bar{b}_2), -a_2(b_1 - \bar{b}_1))$$

Por outro lado, como b_1 e b_2 são quaternios, $(b_2 - \bar{b}_2)$ e $(b_1 - \bar{b}_1)$ são imaginários puros e então $x_2 y_2 - y_2 x_2$ está num subespaço de dimensão 6 de K . Logo imagem da f está num subespaço de K^3 de dimensão 22.

$$vi) \quad \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{15} \longrightarrow \mathbb{R}^{21}$$

Consideremos V um subespaço de K de dimensão 2 consistindo dos elementos (a, b) com a, b reais e W um subespaço de K de dimensão 7 consistindo dos elementos (c, d) com c quaternio e d pertencente a um subespaço dos quaternios de dimensão 3 com parte real.

Sejam $u = (x_1, x_2) \in K \otimes V$ e $v = (y_1, y_2) \in K \otimes V$ com $x_2 = (a_1, a_2)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$.

Por v), $x_2 y_2 - y_2 x_2 = (a_2(b_2 - \bar{b}_2), -a_2(b_1 - \bar{b}_1))$.

Para tais x_2, y_2 , $a_2(b_2 - \bar{b}_2)$ está num subespaço dos quaternios de dimensão 2 e $-a_2(b_1 - \bar{b}_1)$ é um quaternio sem parte real.

Logo $x_2 y_2 - y_2 x_2$ está num subespaço de K de dimensão 5 e então, imagem da f se encontra num espaço de K^3 de dimensão 21.

$$\text{vii)} \quad \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{20}$$

Consideremos V , um subespaço de K como em vi) e W um subespaço de K de dimensão 6, consistindo dos elementos (c, d) com c quaternio e d complexo.

Sejam $u = (x_1, x_2) \in K \oplus V$ e $v = (y_1, y_2) \in K \oplus V$ com $x_2 = (a_1, a_2)$, $y_2 = (b_1, b_2)$.

Para tais u e v , $x_2 y_2 - y_2 x_2 = (a_2(b_2 - \bar{b}_2), -a_2(b_1 - \bar{b}_1))$ onde a primeira coordenada está num subespaço de dimensão 1 de K e a segunda está num subespaço de dimensão 3 de K .

Assim $x_2 y_2 - y_2 x_2$ está num subespaço de K de dimensão 3 e então imagem da f se encontra num subespaço de K^3 de dimensão 19.

$$\text{viii)} \quad \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$$

Tomando agora V um subespaço de K de dimensão 1, portanto formado pelos elementos $(a, 0)$ com a real.

Sejam, $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ com $u \in K \oplus V$,

$v \in K \otimes K$ com $x_2 = (a_1, 0)$ e $y_2 = (b_1, b_2)$

Para tais u e v , $x_2 y_2 - y_2 x_2 = (a_1 b_1 - b_1 a_1, b_2(a_1 - \bar{a}_1)) =$
 $= (0, 0)$ uma vez que a_1 é real e portanto

$$a_1 b_1 = b_1 a_1 \quad \text{e} \quad a_1 = \bar{a}_1.$$

Logo imagem da f está num subespaço de dimensão 16 de K^3 .

O próximo teorema nos permite melhorar iii) e obter uma aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{17}$, trabalhando agora com uma aplicação bilinear definida em $Q^3 = Q \otimes Q \otimes Q$.

3.1.2 - Teorema: Sejam $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ em Q^3 . Então a aplicação $g: Q^3 \times Q^3 \rightarrow Q^5$ definida por

$$g(a, b) = (a_1 b_1 + \bar{b}_2 a_2 + \bar{b}_3 a_3, a_2 \bar{b}_1 - b_2 a_1, a_3 \bar{b}_1 - b_3 a_1, b_2 \bar{a}_3 + a_2 \bar{b}_3, \bar{b}_3 a_3 + \bar{a}_3 b_3)$$

induz uma aplicação bilinear não singular ix) $\mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{17}$

Demonstração: É fácil ver que g é bilinear, vamos mostrar a não singularidade.

Se $g(a, b) = 0$, temos as seguintes equações

$$(1) \quad a_1 b_1 + \bar{b}_2 a_2 + \bar{b}_3 a_3 = 0$$

$$(2) \quad a_2 \bar{b}_1 = b_2 a_1$$

$$(3) \quad a_3 \bar{b}_1 = b_3 a_1$$

$$(4) \quad b_2 \bar{a}_3 = -a_2 \bar{b}_3$$

$$(5) \quad \bar{b}_3 a_3 = -\bar{a}_3 b_3$$

Multiplicando (1) por \bar{b}_1 a direita obtemos:

$$0 = (a_1 b_1) \bar{b}_1 + (\bar{b}_2 a_2) \cdot \bar{b}_1 + (\bar{b}_1 a_3) \cdot \bar{b}_1, \quad \text{usando} \\ (2) \text{ e } (3) \text{ e a associatividade dos quaterniões te} \\ \text{mos:}$$

$$0 = a_1 (b_1 \bar{b}_1) + \bar{b}_2 (a_2 \cdot \bar{b}_1) + \bar{b}_3 (a_3 \bar{b}_1) = a_1 (b_1 \bar{b}_1) + \\ + \bar{b}_2 (b_2 a_1) + \bar{b}_3 (b_3 a_1) = a_1 (b_1 \bar{b}_1) + (\bar{b}_2 b_2) \cdot a_1 + \\ + (\bar{b}_3 b_3) \cdot a_1 = a_1 \cdot [(b_1 \bar{b}_1) + (b_2 \bar{b}_2) + (b_3 \bar{b}_3)] .$$

Supondo $b = (b_1, b_2, b_3) \neq 0$ então $a_1 = 0$. Por outro lado multiplicando (1) por b_2 a esquerda obtemos:

$$0 = b_2 (a_1 b_1) + b_2 (\bar{b}_2 a_2) + b_2 (\bar{b}_3 a_3), \text{ usando (2),} \\ (4), (5) \text{ e a associatividade obtemos:}$$

$$0 = (b_2 a_1) b_1 + (b_2 \bar{b}_2) a_2 + b_2 (\bar{b}_3 a_3) = (a_2 \bar{b}_1) b_1 + \\ + (b_2 \bar{b}_2) a_2 + b_2 (-\bar{a}_3 b_3) = a_2 (\bar{b}_1 b_1) + a_2 (\bar{b}_2 b_2) - \\ - (b_2 \bar{a}_3) \cdot b_3 = a_2 (\bar{b}_1 b_1) + a_2 (\bar{b}_2 b_2) + (a_2 \bar{b}_3) \cdot b_3 = \\ = a_2 (\bar{b}_1 b_1) + a_2 (\bar{b}_2 b_2) + a_2 (\bar{b}_3 b_3) = a_2 [(\bar{b}_1 b_1) + \\ + (\bar{b}_2 b_2) + (\bar{b}_3 b_3)] \quad \text{Logo } a_2 = 0 .$$

Usando o fato de $a_1 = a_2 = 0$, as equações (1), (3) e (4) ficam reduzidos a $\bar{b}_3 a_3 = 0$, $a_3 \bar{b}_1 = 0$, $b_2 \bar{a}_3 = 0$ respectivamente. Como $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ temos $a_3 = 0$.

Com isto está verificada a não singularidade de g .

É fácil ver que g induz a aplicação bilinear $\mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{17}$, para isto basta tomar a última

coordenada de g que é dada por $\bar{b}_3 a_3 + \bar{a}_3 b_3$ e
 ver que é um quaternio que só tem parte real.
 Logo imagem de g está num subespaço de Q^5 de
 dimensão 17.

3.2 - A aplicação $K^3 \times K^3 \rightarrow K^5$

Sejam $u = (x_1, x_2, x_3) \in K^3$ e $v = (y_1, y_2, y_3) \in K^3$.

$$\text{Colocando } \phi_1(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\phi_2(u, v) = \bar{y}_1 x_2 - x_1 \bar{y}_3$$

$$\phi_3(u, v) = \bar{y}_1 x_2 - x_1 \bar{y}_2 + x_3 y_3$$

$$\phi_4(u, v) = \bar{y}_2 x_3 - x_2 \bar{y}_3$$

$$\phi_5(u, v) = x_1 y_1 - y_1 x_1$$

Definimos $h(u, v) = (\phi_1(u, v), \dots, \phi_5(u, v))$.

3.2.1 - Teorema: A aplicação bilinear

$h: K^3 \times K^3 \rightarrow K^5$ é não singular. Além disso, por
 convenientes restrições, h induz as seguintes
 aplicações bilineares não singulares

$$\text{i)} \quad \mathbb{R}^{24} \times \mathbb{R}^{24} \rightarrow \mathbb{R}^{39}$$

$$\text{v)} \quad \mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{24} \rightarrow \mathbb{R}^{38}$$

$$\text{ii)} \quad \mathbb{R}^{21} \times \mathbb{R}^{21} \rightarrow \mathbb{R}^{35}$$

$$\text{vi)} \quad \mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{23} \rightarrow \mathbb{R}^{37}$$

$$\text{iii)} \quad \mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{19} \rightarrow \mathbb{R}^{33}$$

$$\text{vii)} \quad \mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{22} \rightarrow \mathbb{R}^{36}$$

$$\text{iv)} \quad \mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{18} \rightarrow \mathbb{R}^{32}$$

$$\text{viii)} \quad \mathbb{R}^{17} \times \mathbb{R}^{24} \rightarrow \mathbb{R}^{32}$$

Demonstração:

Se $h(u, v) = 0$ então $\phi_1(u, v) = \dots = \phi_5(u, v) = 0$.

$$(1) \quad x_1 y_1 = -x_2 y_2$$

$$(2) \quad \bar{y}_1 x_3 = x_1 \bar{y}_3$$

$$(3) \quad \bar{y}_1 x_2 - x_1 \bar{y}_2 + x_3 y_3 = 0$$

$$(4) \quad \bar{y}_2 x_3 = x_2 \bar{y}_3$$

$$(5) \quad x_1 y_1 = y_1 x_1$$

Para provar a não-singularidade de h usaremos estas equações e as propriedades da Álgebra de Cayley. Dividiremos em diversos casos.

1º caso: Se $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$, as equações acima ficam reduzidas ao seguinte sistema:

$$x_2 y_2 = 0$$

$$x_3 y_3 = 0$$

$$\bar{y}_2 x_3 = x_2 \bar{y}_3$$

Desde que K não tem divisores do zero segue facilmente que $u = 0$ ou $v = 0$.

2º caso: Se $x_1 = 0$ e $y_1 \neq 0$, segue de (2) que $x_3 = 0$, substituindo em (3) $\bar{y}_1 x_2 = 0$, o que nos dá $x_2 = 0$.

Portanto $u = 0$.

3º caso: Se $x_1 \neq 0$ e $y_1 = 0$, segue de (2) que $y_3 = 0$, substituindo em (3). $x_1 \bar{y}_2 = 0$, o que nos dá $y_2 = 0$.

Portanto $v = 0$.

4º caso: Se $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$, segue de (1) que $x_2 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$, usando (2) temos $x_3 = 0$ se e somente se $y_3 = 0$.

Se $x_3 = y_3 = 0$, as equações de (1) a (5) ficam reduzidas ao sistema.

$$(6) \quad x_1 y_1 = -x_2 y_2$$

$$(7) \quad \bar{y}_1 x_2 = x_1 \bar{y}_2$$

$$(8) \quad x_1 y_1 = y_1 x_1$$

Multiplicando a equação (7) por y_1 a esquerda temos $y_1(\bar{y}_1 x_2) = y_1(x_1 \bar{y}_2)$.

Usando a propriedade (2,3,7) e a equação (8) temos:

$$y_1(\bar{y}_1 x_2) = (y_1 \bar{y}_1) x_2 = (y_1 x_1) \bar{y}_2 = (x_1 y_1) \bar{y}_2$$

Agora, multiplicando por y_2 a direita

$$((y_1 \bar{y}_1) x_2) y_2 = ((x_1 y_1) \bar{y}_2) y_2 \text{ que é equivalente}$$

a

$$(y_1 \bar{y}_1)(x_2 y_2) = (x_1 y_1)(\bar{y}_2 y_2),$$

usando (6) e o fato de que $y_1 \bar{y}_1 = N(y_1) = \bar{y}_1 y_1$

e $\bar{y}_2 y_2 = N(y_2) = y_2 \bar{y}_2$ são números reais, a equação acima se reduz a:

$$x_1 y_1 [N(y_1) + N(y_2)] = 0.$$

Como K não tem divisores do zero, $x_1 y_1 = 0$ e isto implicaria $x_1 = 0$ ou $y_1 = 0$, e teríamos uma contradição.

Se $x_3 \neq 0$ e $y_3 \neq 0$.

Multiplicando (2) por y_1 à esquerda temos

$$y_1(\bar{y}_1 x_3) = y_1(x_1 \bar{y}_3).$$

Como $x_1 y_1 = y_1 x_1$ e $y_1 \bar{y}_1 = \bar{y}_1 y_1$, ficamos com

$$(y_1 \bar{y}_1) x_3 = (x_1 y_1) \bar{y}_3.$$

Multiplicando a equação acima por y_3 a direita e usando o fato de $y_1 \bar{y}_1$ ser um número real, chegamos a:

$$(9) \quad x_3 y_3 N(y_1) = x_1 y_1 N(y_3).$$

Substituindo (9) em (3) temos

$$(10) \quad \bar{y}_1 x_2 - x_1 \bar{y}_2 + x_1 y_1 N(y_3) N(y_1)^{-1} = 0.$$

Multiplicando (10) por y_1 à esquerda e por y_2 a direita, usando os argumentos anteriores chegamos a:

$$(11) \quad N(y_1) x_2 y_2 - x_1 y_1 N(y_2) + \\ + (y_1 (x_1 y_1)) y_2 N(y_3) \cdot N(y_1)^{-1} = 0$$

Desde que $x_1 y_1 = y_1 x_1$, temos

$$y_1 (x_1 y_1) = (y_1 x_1) y_1 = (x_1 y_1) y_1 \text{ e temos}$$

$$(y_1 (x_1 y_1)) y_2 = ((x_1 y_1) y_1) y_2 = (x_1 y_1) (y_1 y_2)$$

Usando (1) e este último resultado na equação (11) obtemos:

$$(12) \quad (N(y_1) + N(y_2)) x_1 y_1 = \\ = (x_1 y_1) (y_1 y_2) N(y_3) N(y_1)^{-1}$$

Desde que $x_1 y_1 = y_1 x_1$, vale o cancelamento, e:

$$N(y_1) + N(y_2) = (y_1 y_2) \cdot N(y_3) \cdot N(y_1)^{-1}$$

Tomando $\lambda = N(y_1) + N(y_2)$; temos

$$(13) \quad \bar{y}_1 = y_2 N(y_3) \lambda^{-1}$$

$$(14) \quad \bar{y}_2 = y_1 N(y_3)^{-1} \lambda.$$

$$\text{Então } y_1 \bar{y}_1 = (y_1 y_2) N(y_3) \lambda^{-1}$$

$$\bar{y}_2 y_2 = (y_1 y_2) N(y_3)^{-1} \lambda \text{ e}$$

$$(15) \lambda^2 N(y_3)^{-2} = N(y_2) \cdot N(y_1)^{-1}$$

Substituindo (13) e (14) em (10) obtemos

$$y_2 x_2 = x_1 y_1 (\lambda^2 N(y_3)^{-2} - \lambda N(y_1)^{-1})$$

Usando (15) e o fato de $\lambda = N(y_1) + N(y_2)$ temos $y_2 x_2 = -x_1 y_1$ e então por (1), $x_2 y_2 = y_2 x_2$.

A comutatividade de $x_2 y_2$ e a equação (4) multiplicada a esquerda por y_2 e a direita por y_3 nos dá:

$$x_3 y_3 N(y_2) = x_2 y_2 N(y_3)$$

que somada com (9) e usando (1) obtemos $x_3 y_3 = 0$.

Contradição.

Logo não podemos ter $h(u, v) = 0$ quando todos os x_i , y_j são distintos de zero, $i, j = 1, 2, 3$.

Portanto h é não singular.

Para obter as restrições procedemos exatamente como foi feito em (3.1.1).

Seja $x_1 = (a_1, a_2)$ e $y_1 = (b_1, b_2)$ os números de Cayley representados por pares de quaternios.

Temos então que:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 - y_1 x_1 &= (a_1 b_1 - b_1 a_1 + \bar{a}_2 b_2 - \\ &- \bar{b}_2 a_2, b_2 (a_1 - \bar{a}_1) - a_2 (b_1 - \bar{b}_1)) \end{aligned}$$

é um imaginário puro e portanto está num subespaço de K de dimensão 7, o que nos dá (i).

As outras são obtidas restringindo x_1, y_1 como segue:

Denotando r_i, z_i, q_i qualquer número real, complexo e quaternio respectivamente, e usando o fato do comutador, $x_1 y_1 - y_1 x_1$ ser um imaginário puro, temos:

Se $x_1 = (r_1, q_1)$, $y_1 = (r_2, q_2)$ obtemos (ii)

Se $x_1 = (r_1, z_1)$, $y_1 = (r_2, z_2)$ obtemos (iii)

Se $x_1 = (z_1, 0)$, $y_1 = (z_2, 0)$ obtemos (iv)

Se $x_1 = (r_1, r_2)$, $y_1 = (q_1, q_2)$ obtemos (v)

Se $x_1 = (r_1, z_1)$, $y_1 = ((r_2, z_2), q_1)$ obtemos (vi)

Se $x_1 = (z_1, 0)$, $y_1 = (z_2, 0)$ obtemos (vii)

Se $x_1 = (r_1, 0)$, $y_1 = (q_1, q_2)$ obtemos (viii)

* * *

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

4.1 - Número de secções independentes do fibrado linear canônico.

Consideremos um fibrado η com projeção $\pi: E \rightarrow B$, uma secção S_i em η é uma aplicação contínua $S_i: B \rightarrow E$ tal que $\pi S_i(b) = b$ para cada $b \in B$. As secções S_1, \dots, S_k de η são chamadas independentes, se para cada $b \in B$, $\{S_1(b), \dots, S_k(b)\}$ é um conjunto linearmente independentes de vetores na fibra sobre b .

Note que se θ^k é um fibrado trivial com carta local (B, h) , definindo para cada $b \in B$, $S_i(b) = h(b, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$ (com 1 na i -ésima posição) obtemos k -secções independentes.

Passemos agora a \mathbb{P}^n , o espaço projetivo real de dimensão n e ξ_n^1 o fibrado linear canônico sobre \mathbb{P}^n , cujo espaço total é obtido de $S^n \times \mathbb{R}$ pela identificação $(x, y) = (-x, -y)$.

Para cada inteiro positivo k , denotemos $k\xi_n^1$ a k -soma de Whitney de ξ_n^1 , isto é,

$$k\xi_n^1 = \xi_n^1 \oplus \dots \oplus \xi_n^1 \quad (k\text{-vezes}).$$

Deste modo o espaço total $k\xi_n^1$ é $S^n \times \mathbb{R}^k$ com a identificação $(x, y) = (-x, -y)$, indicado por

$(\overline{x,y})$.

Com isto podemos enunciar:

4.1.1 - Proposição.

Se existe uma aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^k$ então $k\xi_{r-1}^1$ admite s -secções independentes e $k\xi_{s-1}^1$ admite r -secções independentes.

Demonstração:

i) $k\xi_{r-1}^1$ admite s -secções independentes.

Dada a aplicação bilinear não singular $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^k$, consideremos a esfera unitária $S^{r-1} \subset \mathbb{R}^r$ e a aplicação

$F: S^{r-1} \times \mathbb{R}^s \longrightarrow S^{r-1} \times \mathbb{R}^k$ dada por:

$F(u,y) = (u, f(u,y))$ com $u \in S^{r-1}$, $y \in \mathbb{R}^s$.

Se denotarmos por T a involução em $S^{r-1} \times \mathbb{R}^k$, dada por $T(x,y) = (-x,-y)$, vemos que

$\frac{S^{r-1} \times \mathbb{R}^k}{T} = E(k\xi_{r-1}^1)$. Denotando ainda por T

a involução antípoda $T(x) = -x$ obtemos

$$\mathbb{P}^{r-1} = \frac{S^{r-1}}{T}.$$

Deste modo, nossa aplicação F , induz a aplicação $F': \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s \longrightarrow E(k\xi_{r-1}^1)$ dada por:

$F'(\bar{u}, y) = \overline{(u, f(u,y))}$ com $\bar{u} \in \mathbb{P}^{r-1}$, $u \in \mathbb{R}^s$ que está bem definida; pois

$$\begin{aligned} F'(-\bar{u}, y) &= \overline{(-u, f(-u,y))} = \overline{(-u, -f(u,y))} = \\ &= \overline{(u, f(u,y))} = F'(\bar{u}, y) \end{aligned}$$

Estamos na seguinte situação

$$\begin{array}{ccc}
 S^{r-1} \times \mathbb{R}^s & \xrightarrow{F} & S^{r-1} \times \mathbb{R}^k \\
 \downarrow q & \nearrow \bar{F} & \downarrow q' \\
 \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^s & \xrightarrow{F'} & (S^{r-1} \times \mathbb{R}^k)/T
 \end{array}$$

Desde que a topologia de $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ é a coinduzida pela aplicação projeção q , e a aplicação F é contínua, temos \bar{F} contínua. Ainda mais, $F' = g' \circ \bar{F}$, portanto F' é contínua.

Consideremos agora o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s & \xrightarrow{F'} & E(k\xi_{r-1}^1) \\
 \searrow p & & \swarrow \pi \\
 & \mathbb{P}^{r-1} &
 \end{array}$$

onde p é a aplicação projeção do fibrado trivial $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ sobre \mathbb{P}^{r-1} e π a aplicação projeção do fibrado $k\xi_{r-1}^1$ sobre \mathbb{P}^{r-1} . F' é morfismo de fibrados, uma vez que é contínua e para cada $\bar{u} \in \mathbb{P}^{r-1}$ é linear em cada fibra, i.e.,

$$F' \Big|_{p^{-1}(\bar{u})} : u \times \mathbb{R}^s \longrightarrow u \times \mathbb{R}^k$$

$$(u, y) \longmapsto (u, f(u, y)) \text{ é linear,}$$

o que decorre imediatamente do fato de f ser bilinear:

Além disso, $F' \Big|_{p^{-1}(u)}$ é injetora, o que decorre de f ser não singular. Dado $\bar{u} \in \mathbb{P}^{r-1}$,

$$(u, f(u, y)) = (u, 0) \Rightarrow f(u, y) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Agora, o que temos a fazer é transportar as secções de $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ para $k\xi_{r-1}^1$, já que $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$ é trivial sobre \mathbb{P}^{r-1} , e portanto admite s-secções independentes sobre \mathbb{P}^{r-1} ,

Se S_i , $1 \leq i \leq s$ são as secções de $\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$, definimos $C_i(\bar{u}) = F'[S_i(\bar{u})]$, $1 \leq i \leq s$. As funções C_i são secções do fibrado $k\xi_{r-1}^1$ pois

$$\pi C_i(\bar{u}) = \pi F'[S_i(\bar{u})] = p(S_i(\bar{u})) = \bar{u}$$

e são independentes pois F' é injetora nas fibras.

ii) Analogamente prova-se que $k\xi_{s-1}^1$ admite r-secções independentes.

4.1.2 - Resultados obtidos:

Usando as aplicações bilineares obtidas no Capítulo III, teoremas, (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1), e o teorema anterior podemos construir a seguinte tabela:

$\mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^S \longrightarrow \mathbb{R}^K$	$K \xi_{R-1}^1$	nº de secções independentes	$K \xi_{S-1}^1$	nº de secções independentes
$\mathbb{R}^{24} \times \mathbb{R}^{24} \longrightarrow \mathbb{R}^{39}$	$39 \xi_{23}^1$	24		
$\mathbb{R}^{21} \times \mathbb{R}^{21} \longrightarrow \mathbb{R}^{35}$	$35 \xi_{20}^1$	21		
$\mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{19} \longrightarrow \mathbb{R}^{33}$	$33 \xi_{18}^1$	19		
$\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{18} \longrightarrow \mathbb{R}^{32}$	$32 \xi_{17}^1$	18		
$\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{24} \longrightarrow \mathbb{R}^{38}$	$38 \xi_{17}^1$	24	$38 \xi_{23}^1$	18
$\mathbb{R}^{19} \times \mathbb{R}^{23} \longrightarrow \mathbb{R}^{37}$	$37 \xi_{18}^1$	23	$37 \xi_{22}^1$	19
$\mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{22} \longrightarrow \mathbb{R}^{36}$	$36 \xi_{17}^1$	22	$36 \xi_{21}^1$	18
$\mathbb{R}^{17} \times \mathbb{R}^{24} \longrightarrow \mathbb{R}^{32}$	$32 \xi_{16}^1$	24	$32 \xi_{23}^1$	17
$\mathbb{R}^{16} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{23}$	$23 \xi_{15}^1$	16		
$\mathbb{R}^{13} \times \mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^{19}$	$19 \xi_{12}^1$	13		
$\mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}^{17}$	$17 \xi_{10}^1$	11		
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$	$16 \xi_9^1$	10		
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{22}$	$22 \xi_9^1$	16	$22 \xi_{15}^1$	10
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{15} \longrightarrow \mathbb{R}^{21}$	$21 \xi_9^1$	15	$21 \xi_{14}^1$	10
$\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{14} \longrightarrow \mathbb{R}^{20}$	$20 \xi_9^1$	14	$20 \xi_{13}^1$	10
$\mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}$	$16 \xi_8^1$	16	$16 \xi_{15}^1$	9
$\mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{12} \longrightarrow \mathbb{R}^{17}$	$17 \xi_{11}^1$	12		

4.2 - Algumas imersões dos espaços projetivos no espaço Euclídiano.

4.2.1 - Teorema de Ginsburg.

Se existe uma aplicação bilinear não singular
 $f: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ($8 < n+1 < k$) então \mathbb{P}^n
 imerge em \mathbb{R}^{k-1} .

Demonstração: Consideremos o espaço projetivo real de dimensão n , \mathbb{P}^n e ξ_n^1 o fibrado linear canônico sobre \mathbb{P}^n .

$$\text{Tomemos } \underbrace{\xi_n^1 \oplus \xi_n^1 \oplus \dots \oplus \xi_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}} = (n+1)\xi_n^1$$

onde

$E[(n+1)\xi_n^1]$ é obtido de $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ com a identificação $(u, y) = (-u, -y)$, denotado por $(\overline{u, y})$.

Sabemos por (1.6.1) que

$(n+1)\xi_n^1 = \zeta^n(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1(\mathbb{P}^n)$ onde $\zeta^n(\mathbb{P}^n)$ é o fibrado tangente a \mathbb{P}^n e θ^1 é um trivial de dimensão 1 sobre \mathbb{P}^n .

Desde que a aplicação f dada é bilinear não singular, ela induz uma aplicação.

$$\bar{f}: E[(n+1)\xi_n^1] \longrightarrow \mathbb{R}^k \text{ dada por:}$$

$\bar{f}[(\overline{u, y})] = f(u, y)$ com $u \in S^n$, $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ que está bem definida, pois:

$$\bar{f}[(\overline{-u, -y})] = f(-u, -y) = f(u, y) = \bar{f}[(\overline{u, y})]$$

\bar{f} é linear e não singular em cada fibra, isto é, se considerarmos π como a projeção de $(n+1)\xi_n^1$ sobre \mathbb{P}^n , para cada $\bar{u} \in \mathbb{P}^n$.

$$\bar{f} \Big|_{\pi^{-1}(\bar{u})} : u \times \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^k$$

$$(u, y) \longmapsto f(u, y)$$

é linear e não singular, o que decorre trivialmente do fato de f o ser.

Definimos agora a aplicação,

$$\mu: E[(n+1)\xi_n^1] \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k \quad \text{dada por:}$$

$$\mu[(\overline{u, y})] = (\pi[(\overline{u, y})], \bar{f}[(\overline{u, y})])$$

μ está bem definida; pois

$$\begin{aligned} \mu[(\overline{-u, -y})] &= (\pi[(\overline{-u, -y})], \bar{f}[(\overline{-u, -y})]) = \\ &= (\pi[(\overline{u, y})], \bar{f}[(\overline{u, y})]) = \mu[(\overline{u, y})] \end{aligned}$$

Ainda mais, μ é uma aplicação contínua que restrita a cada fibra é linear e injetora portanto um monomorfismo de fibrados.

Deste modo, imagem de μ que é um subconjunto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k$ é um subfibrado de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k$ com fibra \mathbb{R}^{n+1} .

Podemos então construir a seguinte sequência exata curta de fibrados:

$$0 \longrightarrow (n+1)\xi_n^1 \xrightarrow{\mu} \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\delta} \gamma \longrightarrow 0$$

onde γ é o fibrado $(\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k)_{/\text{Im}\mu}$ que tem $\mathbb{R}^{k-(n+1)}$ como fibra.

Deste modo, o fibrado $\theta^k = \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^k$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \theta^k &= (n+1)\xi_n^1 \oplus \gamma = (\zeta^n(\mathbb{P}^n) \oplus \theta^1) \oplus \gamma = \\ &= \zeta^n(\mathbb{P}^n) \oplus (\theta^1 \oplus \gamma) \end{aligned}$$

Recorrendo agora, aos resultados obtidos por Hirsch em [4] que são:

"Uma variedade fechada M^n , de dimensão n , imer

ge em \mathbb{R}^k com $k > n$, se e sômente se, existe um fibrado η com fibra \mathbb{R}^{k-n} tal que $\zeta^n(M) \otimes \eta^{k-n} = \theta^k$. Ainda mais. "Se o fibrado η é tal que $\eta = \eta' \oplus \theta^r$ e $k-r > n$ então M^n imerge em \mathbb{R}^{k-r} ".

Podemos concluir que \mathbb{P}^n imerge em \mathbb{R}^{k-1}

Usandos as aplicações bilineares obtidas em (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1) e o teorema 4.2.1. podemos enunciar.

4.2.2 - Proposição: \mathbb{P}^9 imerge em \mathbb{R}^{15} , \mathbb{P}^{11} imerge em \mathbb{R}^{16} , \mathbb{P}^{12} imerge em \mathbb{R}^{18} , \mathbb{P}^{15} imerge em \mathbb{R}^{22} , \mathbb{P}^{17} imerge em \mathbb{R}^{31} , \mathbb{P}^{18} imerge em \mathbb{R}^{32} , \mathbb{P}^{20} imerge em \mathbb{R}^{34} e \mathbb{P}^{23} imerge em \mathbb{R}^{38} .

4.2.3 - Tábua das melhores imersões de \mathbb{P}^n em \mathbb{R}^{n+k}
 $n \leq 23$. Escreveremos $\mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$

1.	$\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$	13.	$\mathbb{P}^{13} \subseteq \mathbb{R}^{22}$
2.	$\mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$	14.	$\mathbb{P}^{14} \subseteq \mathbb{R}^{22}$
3.	$\mathbb{P}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$	15.	$\mathbb{P}^{15} \subseteq \mathbb{R}^{22}$
4.	$\mathbb{P}^4 \subseteq \mathbb{R}^7$	16.	$\mathbb{P}^{16} \subseteq \mathbb{R}^{31}$
5.	$\mathbb{P}^5 \subseteq \mathbb{R}^7$	17.	$\mathbb{P}^{17} \subseteq \mathbb{R}^{31}$
6.	$\mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{R}^7$	18.	$\mathbb{P}^{18} \subseteq \mathbb{R}^{32}$
7.	$\mathbb{P}^7 \subseteq \mathbb{R}^8$	19.	$\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{32}$ (*)
8.	$\mathbb{P}^8 \subseteq \mathbb{R}^{15}$	20.	$\mathbb{P}^{20} \subseteq \mathbb{R}^{34}$
9.	$\mathbb{P}^9 \subseteq \mathbb{R}^{15}$	21.	$\mathbb{P}^{21} \subseteq \mathbb{R}^{38}$
10.	$\mathbb{P}^{10} \subseteq \mathbb{R}^{16}$	22.	$\mathbb{P}^{22} \subseteq \mathbb{R}^{38}$
11.	$\mathbb{P}^{11} \subseteq \mathbb{R}^{16}$	23.	$\mathbb{P}^{23} \subseteq \mathbb{R}^{38}$
12.	$\mathbb{P}^{12} \subseteq \mathbb{R}^{18}$		

Esta tábua é obtida dos seguintes resultados:

- (1) Se M^n é uma variedade compacta, M^n não imerge em \mathbb{R}^n .
- (2) Se $n = 1, 3, 7$, $\mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; ([10], pg 47)
- (3) Se $n = 2^r$, $\mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ mas não imerge em \mathbb{R}^{2n-2} ; ([10], pg 50).
- (4) $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{R}^7$; [4].
- (5) Se $n = 2^r + 2^s + 2$, $n \geq 10$, \mathbb{P}^n não imerge em \mathbb{R}^{2n-5} ; [3].
- (6) Se $n = 2^r + 2^s + 1$, $r > s \geq 2$, $n \geq 13$, $\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{P}^{n+2}$ imergem em \mathbb{R}^{2n-4} mas não imergem em \mathbb{R}^{2n-5} ; [3]
- (7) Se $n = 2^r + 4$, $n \geq 10$, \mathbb{P}^n não imerge em \mathbb{R}^{2n-7} ; [3].
- (8) $\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{32}$; [11].
- (9) Proposição 4.2.2

Como se pode observar o método usado para encontrar as imersões obtidas em 4.2.2 nos dá as melhores imersões possíveis de \mathbb{P}^n em \mathbb{R}^{n+k} para $9 \leq n \leq 23$ com a excessão de $n = 19$ que por (4.2.2) $\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{34}$, e Sanderson mostrou que $\mathbb{P}^{19} \subseteq \mathbb{R}^{32}$.

Para $1 \leq n \leq 8$, as imersões seguem diretamente dos resultados mencionados acima de (1) a (4). Para $n = 9$, \mathbb{P}^9 não imerge em \mathbb{R}^{15} pois \mathbb{P}^8 não

imerge em \mathbb{R}^{15} por (3).

Para $n = 10$, \mathbb{P}^{10} não imerge em \mathbb{R}^{15} por (5).

Para $n = 11$, \mathbb{P}^{11} não imerge em \mathbb{R}^{15} pois \mathbb{P}^{10} não imerge em \mathbb{R}^{15} .

Para $n = 12$, \mathbb{P}^{12} não imerge em \mathbb{R}^{17} por (7).

Para $n = 13, 14, 15$, \mathbb{P}^{13} , \mathbb{P}^{14} e \mathbb{P}^{15} não imergem em \mathbb{R}^{21} por (6).

Para $n = 16$, \mathbb{P}^{16} não imerge em \mathbb{R}^{30} por (3).

Para $n = 17$, \mathbb{P}^{17} não imerge em \mathbb{R}^{30} pois \mathbb{P}^{16} não imerge em \mathbb{R}^{30} .

Para $n = 18$, \mathbb{P}^{18} não imerge em \mathbb{R}^{31} por (5).

Para $n = 20$, \mathbb{P}^{20} não imerge em \mathbb{R}^{33} por (7).

Para $n = 21, 22, 23$, \mathbb{P}^{21} , \mathbb{P}^{22} , \mathbb{P}^{23} não imergem em \mathbb{R}^{37} por (6).

* * *

B I B L I O G R A F I A

- [1] J. Adem, Some immersions associated with bilinear maps, Bol. Soc. Mat. Mex, (2) 13. (1968), 95-104.
- [2] M. Ginsburg, Some immersions of projective space in Euclidean space, Topology, 2 (1963), 69-71.
- [3] S. Gitler, The projective Stiefel manifolds - II Applications, Topology, 7 (1968), 47-53.
- [4] M.W. Hirsch, Immersions of manifolds, Trans. Amer. Math. Soc, 93. (1959), 242-276.
- [5] D. Husemoller, Fibre Bundles, McGraw-Hill, 1966.
- [6] A.G. Kurosh, Lectures in General Algebra, Pergamon Press, 1965, 221-234.
- [7] K.Y. Lam, Construction of non singular bilinear maps, Topology, 6(1967), 423-26.
- [8] E.L. Lima, Variedades Diferenciáveis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1973.
- [9] S. Mac. Lane, G. Birkhoff, Algebra, MacMillan, 1967.
- [10] J. Milnor, Characteristic classes, Princenton, 1974.
- [11] B.J. Sanderson, Immersions and embeddings of projective spaces, Proc Lond Math. Soc. (3), 14(1964), 135-153.
- [12] R.D. Schafer, An introduction to nonassociative algebras, Academic Press, 1966, 27-29.